

# EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs

## Övning 10

Martin Biel  
mbiel@kth.se

27 september 2016

## Repetition

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

### Styrbarhet

- Ett tillstånd  $x^*$  är *styrbart* om det finns en insignal  $u(t)$  som tar tillståndsvektorn från  $x(0) = 0$  till  $x^*$  på ändlig tid.
- $\mathcal{S} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  - Styrbarhetsmatrisen
- De styrbara tillstånden ligger i  $\text{span}\{\mathcal{S}\}$ .
- Systemet är *styrbart* om alla tillstånd är styrbara, dvs om  $\text{span}\{\mathcal{S}\} = \mathbb{R}^n$  (alternativt ifall  $\mathcal{S}$  har full rang, eller ifall  $\det \mathcal{S} \neq 0$  om  $\mathcal{S}$  är kvadratisk).

### Observerbarhet

- Ett tillstånd  $x^* \neq 0$  är *icke-observerbart* om utsignalen är identiskt noll ( $y(t) \equiv 0$ ) då  $x(0) = x^*$  och  $u(t) \equiv 0$ .

- $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$  - Observerbarhetsmatrisen

- De icke-observerbara tillstånden ligger i  $\ker \mathcal{O}$  (nollrummet till  $\mathcal{O}$ ).
- Systemet är *observerbart* om det saknar icke-observerbara tillstånd, dvs  $\ker \mathcal{O} = \emptyset$  (alternativt ifall  $\text{span}\{\mathcal{O}\} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{O}$  har full rang, eller ifall  $\det \mathcal{O} \neq 0$  om  $\mathcal{O}$  är kvadratisk).

## Uppgift 8.10

Bestäm dimension för de styrbara och icke-observerbara underrummen. Bestäm även dessa underrum.

a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 3 \ 1.5) x \end{aligned}$$

**Styrbarhet:**

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{pmatrix}$$

Första och andra raden är linjärt beroende. Ifall en stryks är de återstående linjärt oberoende.

$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{S}\}) = 2$ . Det styrbara underrummet spänns upp av två valfria linjärt oberoende kolumner i  $\mathcal{S}$ :

$$\text{span}\{\mathcal{S}\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

**Observerbarhet:**

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Ifall vi utför Gauss-eliminering kommer vi kunna svara på båda frågeställningarna.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ -2 & -3 & -1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & -9 & -4.5 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{O}\}) = 2, \dim(\ker \mathcal{O}) = 1$$

En basvektor för  $\ker \mathcal{O}$  bestäms genom att införa  $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$  vilket ger  $x_2 = -0.5t$  och  $x_1 = 0$ . Alltså ges nollrummet av

$$\Rightarrow \ker \mathcal{O} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

vilket även ger underrummet av icke-observerbara tillstånd.

**b)**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \ 3 \ 0) x \end{aligned}$$

---

**Styrbarhet:**

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \\ -2 & 8 & -32 \end{pmatrix}$$

Första raden faller bort och återstående rader är linjärt oberoende.

$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{S}\}) = 2$ . Det styrbara underrummet spänns upp av två valfria linjärt oberoende kolumner i  $\mathcal{S}$ :

$$\text{span}\{\mathcal{S}\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

**Observerbarhet:**

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Tredje kolumnen faller bort och de återstående är linjärt oberoende.  
 $\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{O}\}) = 2, \dim(\ker \mathcal{O}) = 1$ . Utför Gauss-eliminering:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -9 & 12 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ .

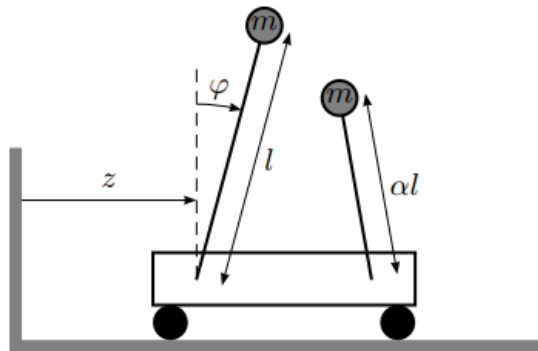
$\Rightarrow \dim(\ker \mathcal{O}) = 1$

Alltså ges nollrummet av

$$\Rightarrow \ker \mathcal{O} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

vilket även ger underrummet av icke-observerbara tillstånd.

## Uppgift 8.13



Figur 1: Two pendlar på en vagn

a)

Linjärisera systemet kring  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  när  $l = m = g = 1$ .

---

Pendel 1:  $\ddot{z} \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 = \sin \varphi_1$

Pendel 2:  $\ddot{z} \cos \varphi_2 + \alpha \ddot{\varphi}_2 = \sin \varphi_2$

Linjärisering:

Pendel 1:  $\ddot{z} + \ddot{\varphi}_1 = \varphi_1$

Pendel 2:  $\ddot{z} + \alpha \ddot{\varphi}_2 = \varphi_2$

Låt  $u = \ddot{z}$  utgöra insignal och inför tillstånden

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1 & \Rightarrow \dot{x}_1 &= x_2 \\x_2 &= \dot{\varphi}_1 & \Rightarrow \dot{x}_2 &= x_1 - u \\x_3 &= \varphi_2 & \Rightarrow \dot{x}_3 &= x_4 \\x_4 &= \dot{\varphi}_2 & \Rightarrow \dot{x}_4 &= \frac{1}{\alpha}(x_3 - u)\end{aligned}$$

Alltså erhålls

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} u$$

b)

För vilka  $\alpha$  är systemet styrbart?

---

Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{S}$  är kvadratisk, så vi kan beräkna determinanten för att dra slutsatser om styrbarhet.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} \right)^2
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \det \mathcal{S} \neq 0$  om  $\alpha \neq 1$ .

$\Rightarrow$  Systemet är styrbart ifall  $\alpha \neq 1$ .

Fallet  $\alpha = 1$  motsvarar ett system där pendlarna är lika långa, vilket resulterar i att varje insignal ger upphov till samma vinkelförändring  $\varphi_1 = \varphi_2$  i båda pendlarna. Således går det inte att uppnå alla tillstånd eftersom det inte är möjligt att nå tillstånd där  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ .

## Tillståndsåterkoppling

Återkoppla systemets tillstånd istället för utsignalen. Slutna systemet ges av

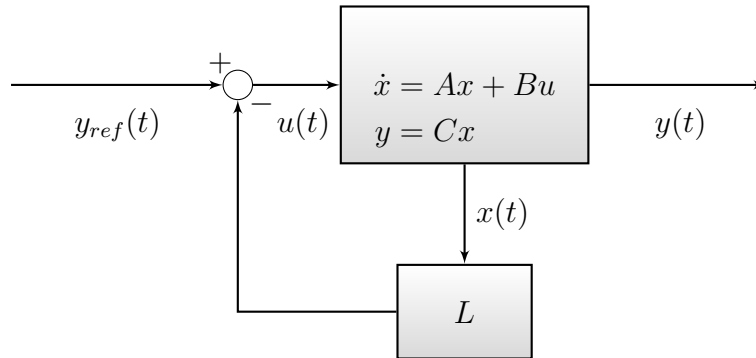
$$\dot{x} = Ax + B(r - Lx) = (A - BL)x + Br \quad y = Cx$$

$\Rightarrow$  Slutna systemet får poler motsvarande egenvärdena till  $A - BL$  (istället för  $A$ ).

$\Rightarrow$  Vi kan påverka polerna med  $L$ !

**Sats** (s.183)

Ifall systemet är styrbart kan polerna (egenvärdena) till  $A - BL$  placeras godtyckligt.

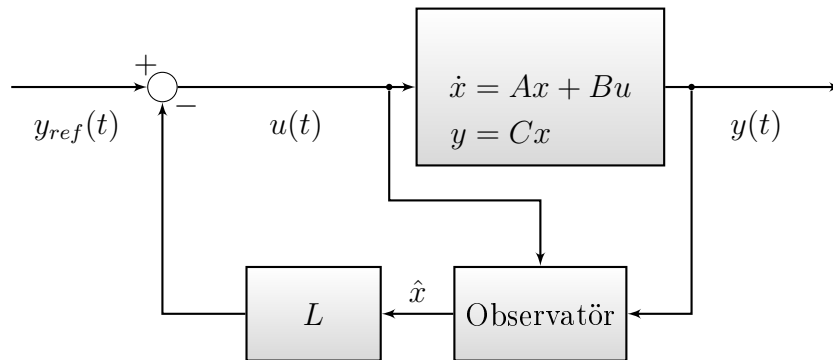


Figur 2: Tillståndsåterkoppling

Ifall systemet inte är styrbart kan det ändå vara möjligt att placera polerna önskvärt.

## Tillståndsobservatör

Om inte tillstånden är mätbara kan en observatör användas för att uppskatta  $x(t)$  från  $y(t)$ . Observatören är också ett dynamiskt system som simulerar det ursprungliga



Figur 3: Tillståndsobservatör

systemet.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

De två första termerna simulerar systemet och den sista termen är en korrigerande term som motsvarar återkoppling av den verkliga utsignalen (observatören simulerar

$C\hat{x}$  men utsignalen ges av  $y$ ). Undersök skattningsfelet  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ :s dynamik:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= Ax + Bu - \{A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})\} \\ &= Ax - A\hat{x} + K(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - KC)\tilde{x}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Om  $(A - KC)$  är stabil (egenvärden i VHP) så går skattningsfelet mot noll.

**Sats** (s.193)

Ifall systemet är observerbart kan polerna (egenvärdena) till  $A - KC$  placeras godtyckligt

Ifall systemet inte är observerbart kan det ändå vara möjligt att placera polerna önskvärt.

## 1 Uppgift 9.1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0)x\end{aligned}$$

**a)**

Bestäm en tillståndsåterkoppling som placerar polerna i

(i)  $-3, -5$

(ii)  $-10, -15$

Vad begränsar godtycklig dynamik?

---

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



har full rang.

⇒ Kan placera polerna till  $A - BL$  godtyckligt.

$$A - BL = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (l_1 \quad l_2) = \begin{pmatrix} -2 - l_1 & -1 - l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - (A - BL)) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s + 2 + l_1 & 1 + l_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s + 2 + l_1) + 1 + l_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 + (2 + l_1)s + (1 + l_2) = 0$$

Identifiera koefficient så att de efterfrågade polerna erhålls.

(i)  $(s + 3)(s + 5) = s^2 + 8s + 15$

⇒  $l_1 = 6, l_2 = 14$

⇒  $u = -6x_1 - 14x_2 + y_{ref}$

(ii)  $(s + 10)(s + 15) = s^2 + 25s + 150$

⇒  $l_1 = 23, l_2 = 149$

⇒  $u = -23x_1 - 149x_2 + y_{ref}$

Ju längre ut i VHP polerna placeras desto större koefficienter dyker upp i styrlagen, vilket resulterar i en större insignal.

⇒ Godtycklig dynamik kan ej uppnås på grund av fysiska begränsningar i insignalen.

**b)**

Om enbart  $y(t)$  kan mätas, bestäm en observatör. (och diskutera polernas påverkan)

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

har full rang.

⇒ kan placera polerna till  $A - KC$  godtyckligt.

Skattningsfelets dynamik ges av

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$

Vi vill att skattningsfelet går mot noll snabbare än det styrda systemets dynamik. Således bör observatörens poler placeras längre till vänster i VHP än det slutna systemet. (t.ex. i  $s = -20$ ). Ifall polerna placeras för långt ut blir observatören känslig för mätbrus.

$$A - KC = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - (A - KC)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} s + (2 + k_1) & 1 \\ -1 + k_2 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 + (2 + k_1)s + (1 - k_2) = 0$$

Två poler i  $s = -20$  ger

$$(s + 20)^2 = s^2 + 40s + 400$$

$\Rightarrow k_1 = 38, k_2 = -399$  Den resulterande observatören ges av

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 38 \\ -399 \end{pmatrix} [y - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}]$$