

EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs

Övning 5

Martin Biel
mbiel@kth.se

13 september 2016

Argumentvariationsprincipen

Låt $f(z)$ vara en *meromorf* funktion, det vill säga en funktion som är *analytisk* i ett öppet område Ω , så när som på ett ändligt antal punkter (poler).

Ifall γ är en kurva som *omsluter* P poler och N nollställena till $f(z)$ enkelt (ett varv) så gäller att

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{var}_{\gamma} \arg f(z)$$

$f(z)$ definierar en avbildning $\gamma \rightarrow \gamma'$, så att varje punkt $z \in \gamma$ mappas till en punkt $z' = f(z) \in \gamma'$, och $\text{var}_{\gamma} \arg f(z)$ innefattar variationen i argument längs den mappade kurvan γ' när γ genomlöps i positiv riktning (moturs). I enklare mening kan variationen i argument tolkas som antal varv γ' löper kring origo. Genom Argumentvariationsprincipen är det möjligt att dra slutsatser om en funktions poler och nollställena, som omsluts av en sluten kurva, genom att grafiskt observera funktionens avbildning av kurvan. Argumentvariationsprincipen ligger som grund för Nyquistkriteriet.

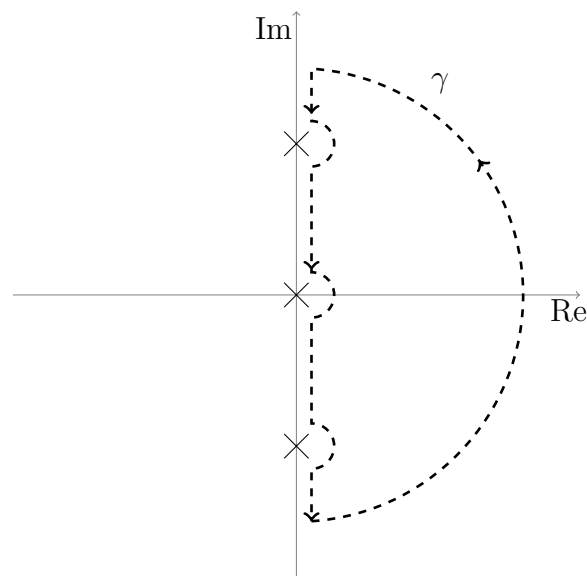
Nyquistkriteriet

När vi ritade Rotort undersökte vi stabiliteten hos det slutna systemet genom att analysera det slutna systemets poler. Med Nyquistkriteriet är det möjligt att undersöka stabilitet hos det slutna systemet genom att analysera det öppna systemet.

Sluta systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

Därav följer att polerna till $G_c(s)$ motsvarar nollställen till funktionen $1 + G_0(s)$. Alltså är det slutna systemet instabilt ifall $1 + G_0(s)$ har nollställen i HHP. Idén med Nyquistkriteriet är att återropa argumentvariationsprincipen på $G_0(s)$ för att dra slutsatser om hur många av det slutna systemets poler som befinner sig i HHP. Eftersom vi är intresserade av nollställen till $1 + G_0(s)$ i höger halvplan använder vi den slutna kurvan som återges i Figur 1.



Figur 1: Kurvan γ som avbildas av $G_0(s)$ i Nyquistkriteriet.

Genom att öka radien av den stora halvcirkeln så kommer γ i gräns att täcka hela HHP. Notera att eventuella poler på imaginäraxeln måste uteslutas eftersom argumentvariationsprincipen kräver att $G_0(s)$ är analytisk på randen av γ . Poler utesluts genom att låta kurvan röra sig längs halvciklar, med godtyckligt liten radie, omkring dem. Låt $N_{1+G_0(s)}$ beteckna antalet nollställen i HHP hos $1 + G_0(s)$ och $P_{1+G_0(s)}$ notera antalet poler i HHP. Antalet poler hos $1 + G_0(s)$ är samma som antalet poler hos $G_0(s)$, alltså gäller $P_{1+G_0(s)} = P_0$. Åberopa nu argumentsvariationsprincipen genom att låta $G_0(s)$ avbilda kurvan γ ovan (Notera att vi observerar avbildningen

av $G_0(s)$, inte $1 + G_0(s)$).

$$\begin{aligned} N_{1+G_0(s)} - P_0 &= \frac{1}{2\pi} \text{var}_\gamma \arg(1 + G_0(s)) \\ \Rightarrow N_{1+G_0(s)} &= P_0 + \text{antal varv } \gamma' \text{ omsluter } -1 \text{ i positiv riktning} \end{aligned}$$

Eftersom kurvan mappas av $G_0(s)$ räknar vi antal varv kring -1 istället för kring origo. Kom ihåg att riktningen spelar stor roll! I enkla termer gäller alltså att:

$$\begin{aligned} &\text{Antalet poler i HHP för det slutna systemet} \\ &= \\ &\text{Antalet poler i HHP för det öppna systemet} \\ &+ \\ &\text{Antal varv } \gamma' \text{ omsluter } -1 \text{ i positiv riktning} \end{aligned}$$

Ifall det öppna systemet inte har några poler i HHP säger Nyquist kriteriet att -1 inte får omslutas av γ' i positiv riktning för att slutna systemet ska vara stabilt. Notera att Ifall öppna systemet har en pol i HHP så krävs det att γ' omsluter -1 i negativ riktning minst en gång för stabilitet!

Nyquistkurvan

Nyquistkurvan innefattar avbildningen av positiva Im-axeln, det vill säga $G_0(s)$ då $s = i\omega$ där $\omega : 0 \rightarrow \infty$. Notera att denna kurvas riktning är motsatt den som uppstår om hela nyquistdiagrammet ritas. För enklare system, som inte ger upphov till komplexa nyquistdiagram, så kan ett förenklat Nyquistkriterium tillämpas baserat på Nyquistkurvan:

Ifall $G_0(s)$ inte har några poler i HPP så är det slutna systemet stabilt ifall punkten -1 ligger till vänster om Nyquistkurvan.

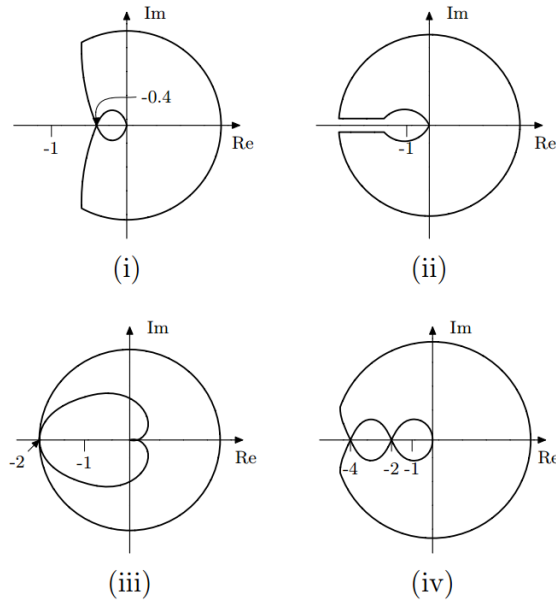
I uppgifterna nedan åsyftar *Nyquistdiagram* hela avbildningen av γ , och *Nyquistkurvan* enbart positiva Im-axelns avbildning.

Uppgift 3.14

Ett system $G(s)$ styrs genom återkoppling med en P -regulator.

A)

För $K_P = 1$ erhålls nyquistdiagrammen i Figur 2. Vilka motsvarande slutna system är stabila? ($G(s)$ har inga poler i HHP i något av fallen)



Figur 2: Nyquistkurvor för 4 olika system då en P -regulator med $K_P = 1$ används.

Eftersom de öppna systemet inte har några poler i HHP blir stabilitetskriteriet att -1 inte får omslutas i Nyquistdiagrammet. Det kan i början vara konceptuellt svårt att bestämma ifall -1 omsluts i ett Nyquistdiagram (särskilt om man inte tidigare läst en kurs i komplex analys). Det finns olika knep och minnesregler för att underlätta, men det krävs framförallt träning.

Ett trick är att låta en penna utgå från -1 och först peka mot origo (åt höger). Låt detta motsvara ursprungsvinkeln 0 grader. Följ sen nyquistdiagrammet (moturs) med pennspetsen och försök visualisera vinkeln mellan pennspetsen och origo. När pennan istället pekar åt vänster har vi svept 180 grader, och ifall vi fortsätter i samma riktning tills den pekar åt höger igen har vi svept 360 vilket motsvarar ett varv. När pennspetsen har rört varje del av kurvan och vi är tillbaka i origo kan vi räkna hur många gånger vi svepte 360 grader i motursriktningen.

i) I det här Nyquistdiagrammet omsluts inte -1 alls. Med penntricket: Ifall vi följer kurvan mellan origo och -0.4 så pekar pennan först upp en aning men återgår sen till att peka åt höger. Detta innebär att sett från -1 är den totala argumentvariationen noll mellan origo och -0.4 . På samma sätt är variationen noll mellan -0.4 och positiva skärningen med Re-axeln, och därifrån gäller samma resultat när kurvan återgår till origo.

⇒ Det slutna systemet är stabilt.

ii) Det här fallet är något lättare eftersom det tydligt går att se vilken område som omsluts av nyquistdiagrammet. Eftersom -1 inte finns på insidan av kurvan (till exempel omsluts 1) så omsluts in -1 .

⇒ Det slutna systemet är stabilt.

iii) Med penntricket: Mellan origo och -2 sveper pennan 180 grader, eftersom den nu pekar åt vänster mot -2 . När vi fortsätter följa kurvan moturs till positiva skärningen med Re-axeln fortsätter pennan svepa tills den till slut pekar åt höger igen. Således har vi då gått ett varv runt -1 . Samma sak upprepas när vi löper längs restrerande halvan av kurvan, pennan pekar tillslut till höger igen och vi har rört oss två varv kring -1 . Kurvan omsluter alltså -1 två gånger.

⇒ Det slutna systemet är instabilt.

iv) Med penntricket: Mellan origo och -2 sveper vi likt innan 180 grader, men när vi följer kurvan från -2 till positiva skärningen med Re-axeln byter pennan riktningen och återgår till slut till att peka åt höger (men den här gången har vi inte gått ett fullt varv!). Samma sak upprepas när vi löper längs den restrerande halvan av kurvan, vi sveper först 180 i en riktning, men sen 180 i motsatt riktning. Således omsluter vi totalt -1 två gånger, fast i motsatt riktning!

⇒ Det slutna systemet är stabilt.

b)

Ifall nu $K > 0$, för vilka K blir respektive slutna system ovan stabila?

Hur påverkar K Nyquistdiagrammen? Ifall vi bestämmer hur ett tal på kurvan förändras på grund av K får vi direkt hur hela kurvan förändras. Varje punkt på kurvan är ett komplext tal med belopp och argument. Minns att $\gamma'(s) = G_0(s)$ längs $\gamma) = KG(s)$ längs $\gamma)$

Belopp:

$$|\gamma'(s)| = |KG| = |K| \cdot |G|$$

\Rightarrow Varje punkt på kurvan skalas med en faktor K .

Argument:

$$\arg(\gamma'(s)) = \arg(KG) = \arg(K) + \arg(G) = 0 + \arg(G)$$

(Argumentet för K är noll eftersom det är ett reellt tal).

\Rightarrow Inga vinklar ändras!

\Rightarrow Nyquistdiagrammen spänns ut/in med en faktor K , men bibehåller sin form (eftersom inga argument förändras).

Identifiera kritiska punkter och undersök för vilka K som -1 omsluts.

i) Ifall skärningen med negativa Re-axeln (som för $K = 1$ är -0.4) sker vänster om -1 så omsluter kurvan -1 (verifiera med t.ex. penntricket).

$$K \cdot 0.4 = 1 \Rightarrow K = \frac{5}{2}$$

\Rightarrow Stabilt när $0 < K < \frac{5}{2}$.

ii) Det är inte möjligt att skala om den här kurvan så den omsluter -1 .

\Rightarrow stabilt för $0 < K < \infty$.

iii) Den kritiska punkten är vid -2 (skärning med negativa Re-axeln). Ifall detta sker till höger om -1 så omsluter inte kurvan -1 (verifiera med t.ex. penntricket).

$$K \cdot 2 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow stabilt för $0 < K < \frac{1}{2}$.

iv) Det här fallet har två kritiska punkter. Vi kan likt (iii) helt utesluta att -1 omsluts ifall vi flyttar skärningen längs till vänster (i -4) till att ligga höger om -1 .

$$K \cdot 4 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

Notera sen att ifall den andra skärningen med negativa Re-axeln (i -2) skulle ske till höger om -1 så erhålls inte längre fenomenet när -1 omsluts i motsatta riktningar. Istället omsluts -1 nu två gånger (verifiera med t.ex. penntricket).

$$K \cdot 2 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow stabilt för $0 < K < \frac{1}{4}, K > \frac{1}{2}$.

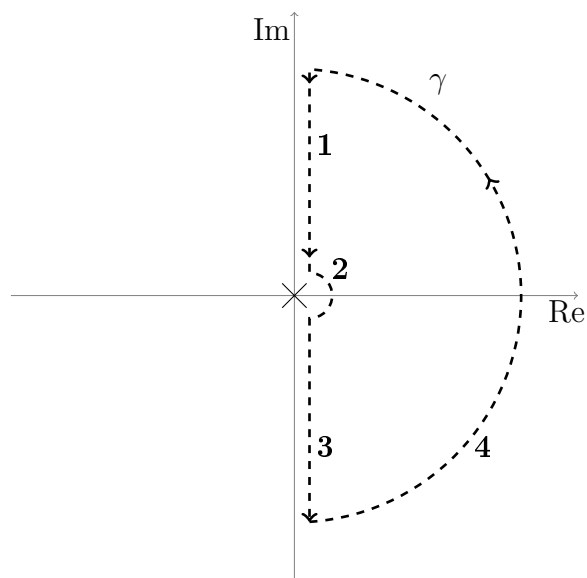
Uppgift 3.15

b)

Rita Nyquistdiagrammet för dubbelintegratorn

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Dubbelintegratorn har en dubbelpol i origo som måste uteslutas. Således ges domänkurvan γ som följer, se Figur 3



Figur 3: Kurvan γ .

I figuren har delar som lättast parametriserats för sig märkts ut. Undersök hur de fyra delarna mappas av $G(s)$ i turordning.

1 Positiva Im-axelns avbildning.

$s = i\omega$ där $\omega : \infty \rightarrow 0$.

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

Avbildningens början: $-\frac{1}{\omega^2} \rightarrow 0$ då $\omega \rightarrow \infty$

Avbildningens slut: $-\frac{1}{\omega^2} \rightarrow -\infty$ då $\omega \rightarrow 0$

Den positiva Im-axeln mappas alltså på negativa Re-axeln (i vänster riktning $-\infty \rightarrow 0$).

2 Lilla halvcircelns avbildning

$s = re^{i\theta}$ där $r \rightarrow 0, \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$G(re^{i\theta}) = \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}}$$

Avbildningens början: $G(re^{i\theta}) \rightarrow \infty \cdot e^{-i\pi}$ då $r \rightarrow 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

Avbildningens slut: $G(re^{i\theta}) \rightarrow \infty \cdot e^{i\pi}$ då $r \rightarrow 0, \theta = -\frac{\pi}{2}$

Den lilla halvcirlen mappas alltså på en stor helcirkel (-180 grader till 180 grader med växande radie).

3 Negativa Im-axeln $s = -i\omega$ där $\omega : 0 \rightarrow \infty$.

$$G(-i\omega) = \frac{1}{(-i\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

Avbildningens början: $-\frac{1}{\omega^2} \rightarrow -\infty$ då $\omega \rightarrow 0$

Avbildningens slut: $-\frac{1}{\omega^2} \rightarrow -0$ då $\omega \rightarrow \infty$

Den negativa Im-axeln mappas alltså på negativa Re-axeln (i höger riktning $0 \rightarrow -\infty$).

4 Stora halvcirlens avbildning

$s = Re^{i\theta}$ där $r \rightarrow \infty, \theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

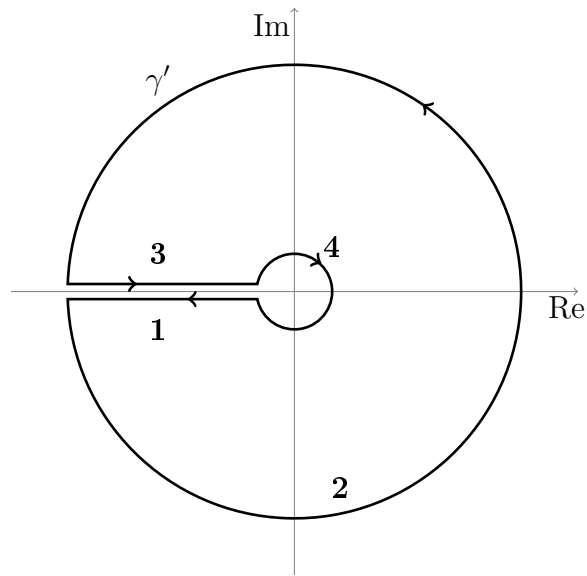
$$G(Re^{i\theta}) = \frac{1}{(Re^{i\theta})^2} = \frac{1}{R^2 e^{2i\theta}}$$

Avbildningens början: $G(Re^{i\theta}) \rightarrow 0 \cdot e^{i\pi}$ då $R \rightarrow \infty, \theta = -\frac{\pi}{2}$

Avbildningens slut: $G(Re^{i\theta}) \rightarrow 0 \cdot e^{-i\pi}$ då $R \rightarrow \infty, \theta = \frac{\pi}{2}$

Den stora halvcirlen mappas alltså på en liten helcirkel (180 grader till -180 grader med minskande radie).

Det resulterande Nyquistdiagrammet är uppritat i Figur 4.



Figur 4: Nyquistdiagram för dubbelintegratorn

Notera att del **1** och del **3** går längs negativa Re-axeln, gapet är bara inritat för att förtydliga diagrammets riktning. Kurvan omsluter inte -1 eftersom den punkten ligger på randen av diagrammet. Denna situation uppstår eftersom det slutna systemet får poler på imaginära axeln.

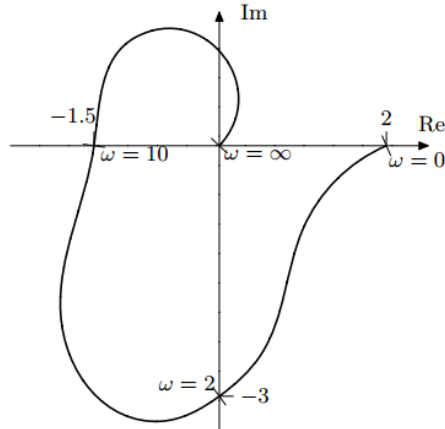
Uppgift 3.16

Ett system $G(s)$ är asymptotiskt stabilt (ekvivalent med insignal-utsignal stabilt för de system som förekommer i den här kursen), och styrs genom negativ återkoppling. Nyquistkurvan för $G(s)$ är återgiven i Figure 5.

a)

Ifall en P-regulator används, för vilka K_P är det slutna systemet stabilt?

Eftersom en *Nyquistkurva* är given blir stabilitetskriteriet att -1 måste ligga till vänster om kurvan. Minns att K_P bara ändrar beloppet av varje punkt på kurvan. Identifiera den kritiska punkten när Nyquistkurvan skär negativa Re-axeln i -1.5 .



Figur 5: Nyquistkurva för $G(s)$.

Ifall skärningen sker till höger om -1 erhålls ett stabilt slutet system.

$$K \cdot 1.5 = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

\Rightarrow stabilt slutet system ifall $K < \frac{2}{3}$.

b)

Bestäm det stationära felet, e_∞ , som funktion av K_P ifall y_{ref} är ett enhetssteg.

Vet från a) att $G_c(s)$ är stabil då $K < 2/3$. Alltså kan vi använda slutvärdessatsen för dessa K :

$$\begin{aligned} E(s) &= S(s)Y_{ref}(s) = \frac{1}{1 + K_P G(s)} Y_{ref}(s) \\ \Rightarrow e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K_P G(s) \cdot \frac{1}{s}} \\ &= \frac{1}{1 + K_P G(0)} = \{G(0) = 2 \text{ (se figur)}\} = \frac{1}{1 + 2K_P} \end{aligned}$$

Det stationära felet ges alltså av

$$e_\infty = \frac{1}{1 + 2K}, K < \frac{2}{3}$$

Notera att det stationära felet försvinner endast då $K_P \rightarrow \infty$, men systemet blir instabilt redan för $K_P = 2/3$. Det är inte möjligt att stabilisera systemet $G(s)$ med enbart P-reglering utan att det uppstår ett stationärt fel.

c)

Ifall $G(s)$ istället styrs av en I-regulator:

$$\frac{K_I}{s}$$

(vilket skulle eliminera det stationära felet) För vilka K_I är det slutna systemet stabilt?

Hur påverkar integratorn Nyquistkurvan?

Belopp:

$$|\gamma'(s)| = \left\{ \begin{array}{l} s = i\omega \\ \omega \geq 0 \end{array} \right\} = \left| \frac{K_I}{i\omega} \right| |G(i\omega)| = \left| \frac{K_I}{\omega} \right| |G(i\omega)|$$

\Rightarrow Kurvan skalas med $\left| \frac{K_I}{\omega} \right|$.

Argument:

$$\arg(\gamma'(s)) = \arg\left(\frac{K_I}{i\omega} G(i\omega)\right) = \arg(K_I) - \arg(i\omega) + \arg(G(i\omega)) = \arg(G(i\omega)) - \frac{\pi}{2}$$

\Rightarrow Kurvan vrid 90 grader *medurs* (minns att *moturs* är den positiva riktningen). För att underlätta vrider vi kurvan 90 grader innan vi applicerar skalningen. Skärningen med negativa Im-axeln i $-3i$ då $\omega = 2$ kommer vridas 90 grader medurs och blir då en skärning med negativa Re-axeln i -3 . Detta blir våran nya kritiska punkt. Likt tidigare kollar vi vad K_I måste uppfylla för att skärningen med Re-axeln ska ske till höger om -1 :

$$\left| \frac{K_I}{\omega} G(i\omega) \right| = \{\omega = 2\} = \left| \frac{K_I}{2}(-3) \right| = \frac{3}{2} K_I = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

\Rightarrow stabilt slutet system ifall $K > \frac{2}{3}$.