EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs
Övning 6

Martin Biel
mbiel@kth.se

14 september 2016

Repetition

Linjärt tids-invariant system (LTI):

- $\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \to \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$
- $u(t-T) \to y(t-T), \forall T$

$\Rightarrow$ En summa av olika insignaler superpositioneras och det spelar ingen roll *när* vi lägger på insignalen, utan *hur länge* den har verkat.

Frekvenssvar

Låt $u(t) = \sin \omega t = \text{Im } e^{i\omega T}$ och minns att utsignalen kan bestämmas genom en faltning mellan insignalen $u(t)$ och överföringsfunktionen

$$G(s) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau$$

så att

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{Im} \int_0^\infty e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{Im} \int_0^\infty g(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \cdot e^{i\omega t} \\
&= \mathrm{Im}\ G(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \\
&= \mathrm{Im}\ |G(i\omega)| \cdot e^{i \arg G(i\omega)} \cdot e^{i\omega t} \\
&= |G(i\omega)| \sin \omega t + \phi
\end{aligned}
$$

där $\phi = \arg G(i\omega)$.
$\Rightarrow$ Insignalen förstärks med $|G(i\omega)|$ och förskjuts med $\arg G(i\omega)$.

Eftersom linjära system superpositionerar insignaler, och godtyckliga funktioner kan skrivas som en serie trigonometriska funktioner (Fourierserie), så är det tillräckligt att analysera $G(i\omega)$ för att dra slutsatser om hur systemet påverkas av olika insignaler. $G(i\omega)$ kallas systemets *frekvenssvar*.

Bodediagram

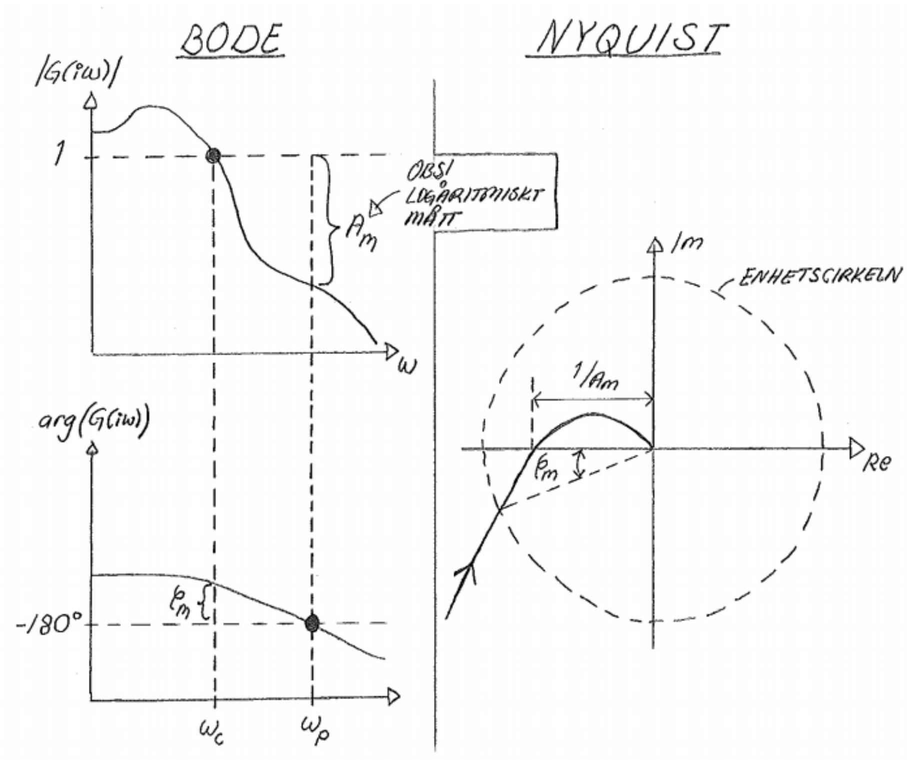
Bodediagram består av två diagram

- $|G(i\omega)|$ - Beloppskurva (Ofta i logaritmisk skala)
- $\arg G(i\omega)$ - Faskurvan

Nyquistkurvan är precis

$$G(i\omega), \omega : 0 \to \infty$$

Alltså visar Bodediagrammen och Nyquistkurvan samma sak! Deras relation är illustrerad i Figur



Figur 1: Samband mellan Bodediagrammet och Nyquistkurvan (Källa: Mariette Annergren

I Bodediagrammet (och även indirekt i Nyquistkurvan) kan några storheter som ger mycket information om systemet definieras:

- ω_p - Fasskärfrekvens
  - Bode: Faskurvan skär $-180°$
  - Nyquist: kurvan skär negativa Re-axeln
- ω_c - Skärfrekvens
  - Bode: Beloppskurvan skär 1 (0 dB)
  - Nyquist: Kurvan skär enhetscirkeln

- φ_m - Fasmarginal
  - Bode: Vinkelavståndet mellan fasen vid ω_c och $-180°$
  - Nyquist: Vinkeln mellan negativa Re-axeln och skärningen med enhetscirkeln
- A_m - Amplitudmarginal
  - Bode: Logaritmiskt avstånd mellan beloppet vid ω_p och 0 dB (belopp 1)
  - Nyquist: Inversa avståndet mellan origo och skärningen med negativa Re-axeln

Elementära Bodediagram

Betrakta
$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$
för små frekvenser gäller
$$G(s)_{lf} = \frac{b}{a}$$
en konstant, och för stora frekvenser gäller
$$G(s)_{hf} = \frac{b}{s}$$
Det är nu möjligt att identifiera en brytpunkt när asymptoterna skär varandra:
$$\frac{b}{a} = \frac{b}{s} \Rightarrow s = a$$
när bodediagrammet når brytpunkten $s = a$ sker en negativ lutningsförändring. På samma sätt gäller att när bodediagrammet för någon annan $\tilde{G}(s)$, med nollställen, når en brytpunkt i täljaren så sker en positiv lutningsförändring. Dessa betraktelser går att generalisera till allmänna bodediagram.

Skissa Bodediagram

1. Faktorisera $G(s)$:
$$G(s) = \frac{K(1+s/z_1)(1+s/z_2)\dots(1+s/z_m)}{s^p(1+s/p_1)(1+s/p_2)\dots(1+s/p_n)}$$

Nu gäller

$$\log|G(i\omega)| = \log K - p\log\omega + \log\left|1+\frac{i\omega}{z_1}\right| + \cdots + \log\left|1+\frac{i\omega}{z_m}\right| - \log\left|1+\frac{i\omega}{p_1}\right| - \cdots - \log\left|1+\frac{i\omega}{p_m}\right|$$

$$\arg G(i\omega) = -\frac{\pi p}{2} + \arg 1 + \frac{i\omega}{z_1} + \cdots + \arg 1 + \frac{i\omega}{z_m} - \arg 1 + \frac{i\omega}{p_1} - \cdots - \arg 1 + \frac{i\omega}{p_n}$$

Bodediagrammet är alltså en summa av elementära Bodediagram!

2. Beräkna lågfrekvensasymptot ($\omega \to 0$)

3. Beräkna högfrekvensasymptot ($\omega \to \infty$)

4. Identifiera brytpunkter: $z_1, z_2, \ldots, z_m, p_1, p_2, \ldots, p_n$

5. Identifiera bidrag till lutning (följer från de elementära Bodediagrammen):
   - Brytpunkt från en pol $\to -1$ dekad/dekad i lutning
   - Brytpunkt från nollställe $\to 1$ dekad/dekad i lutning
   - Inledningsvis är lutningen $-p$

6. Förankra Bodediagrammet i en godtycklig punkt $\bar{\omega}$ genom att beräkna $|G(i\bar{\omega})|$

7. Beräkna $\arg G(i\omega)$ för några olika ω och interpolera faskurvan.

Uppgift 4.2

Målet är att behålla en given kurs Φ för ett fartyg, låt

$$\omega = \dot{\Phi}$$

För små ω och δ gäller

$$T_1\dot{\omega} = -\omega + k_1\delta$$

där $T_1 = 100$ och $k_1 = 0.1$. Fartyget är utrustat med en autopilot

$$F(s) = K\frac{1+s/a}{1+s/b}$$

(där $a = 0.02$ och $b = 0.05$) vars mål är att se till att fartyget bibehåller kursen. Den beräknade insignalen styr ett roder med följande dynamik

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + sT_2}$$

där $T_2 = 10$. Totalt gäller alltså

$$\Phi(s) = G_s(s)G_r(s)F(s)$$

där $\Phi(s) = G_s(s)\Delta(s)$

a)

Rita Bodediagram för FG_rG_s för $K = 0.5$

Bestäm först $G_s(s)$:

$$\begin{aligned} T_1\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} &= k_1\delta \\ \Rightarrow s^2T_1\Phi(S) + s\Phi(s) &= k_1\Delta(s) \\ \Rightarrow \Phi(s) &= \frac{k_1}{T_1s^2 + s}\Delta(s) \end{aligned}$$

så att

$$G(s) = \frac{k_1}{T_1S^2 + s}$$

Alltså gäller

$$G_0(s) = F(s)G_r(s)G_s(s) = K\frac{1 + \frac{s}{a}}{1 + \frac{s}{b}} \cdot \frac{1}{1 + sT_2} \cdot \frac{k_1}{T_1s^2 + s}$$

1) Faktorisera:

$$G_0(s) = \frac{Kk_1(1 + \frac{s}{a})}{s(1 + \frac{s}{b})\left(1 + \frac{s}{(\frac{1}{T_2})}\right)\left(1 + \frac{s}{(\frac{1}{T_1})}\right)}$$

2) Lågfrekvensasymptot:

$$s \to 0 \Rightarrow G_0(s) \to \frac{Kk_1}{s} = \frac{0.05}{s}$$

3) Högfrekvensasymptot:

$$s \to \infty \Rightarrow G_0(s) \to \frac{Kk_1 \cdot \frac{s}{a}}{s \cdot \frac{s}{b} \cdot \frac{s}{1/T_2} \cdot \frac{s}{1/T_1}} = \frac{Kk_1 b}{aT_1T_2} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1.25 \cdot 10^{-4}}{s^3}$$

4)+5) Brytpunkter + bidrag

Punkt	0	$1/T_1 = 0.01$	$a = 0.02$	$b = 0.05$	$1/T_2 = 0.1$
Typ	pol	pol	nollställe	pol	pol
Bidrag	-1 dek/dek	-1 dek/dek	+1 dek/dek	-1 dek/dek	-1 dek/dek
Lutning	-1 dek/dek	-2 dek/dek	-1 dek/dek	-2 dek/dek	-3 dek/dek

Tabell 1: Brytpunkterna till G_0 med lutningsbidrag och resulterande lutning

Resultatet stämmer överens med låg- och högfrekvensasymptoterna.
6) Förankra
Välj en godtyckligt punkt mellan första och andra brytpunkt (eller mellan 0 och första brytpunkt ifall $p = 0$).

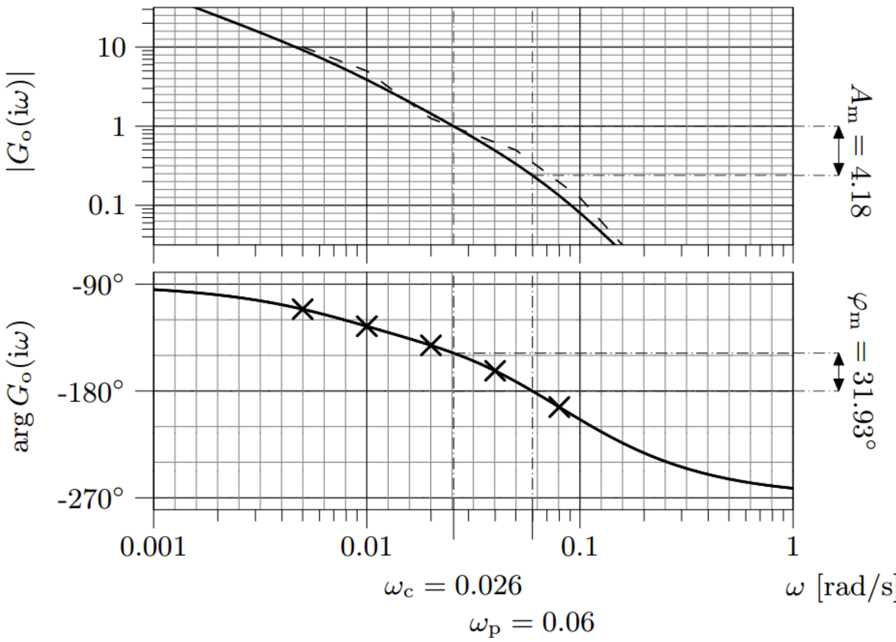
$$|G_0|_{lf} = \{\omega = 0.005\} = \frac{0.05}{0.005} = 10$$

7) Beräkna några punkter på faskurvan

Frekvens	0.001	0.005	0.01	0.02	0.04	0.08
Fas	$-95°$	$-111°$	$-125°$	$-142°$	$-163°$	$-194°$

Tabell 2: Fasen för $G_0(s)$ för några ω

Det resulterande bodediagrammet återges i Figur 2. Notera att det verkliga diagrammet befinner sig något under asymptoterna.



Figur 2: Bodediagram för $G_0(s)$

b)

K ökar till dess systemet börjar självsvänga. Vid vilket K värde sker detta och med vilken period sker svängningarna?

Systemet börjar självsvänga precis när det övergår till instabilitet, det vill säga då Nyquistkurvan korsar -1. I Bodediagrammet motsvarar detta att $\omega_c = \omega_p$ eftersom Nyquistkurvan då skär negativa Re-axeln med belopp 1. Från Bodediagrammet erhålls

$$|0.5G(i\omega)| = \{\omega = \omega_p = 0.06\} = 0.24$$

så att

$$|G(i\omega_p)| = 0.48$$

Välj K så att $\omega_c = \omega_p$:

$$K|G(i\omega_p = | = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{0.48} = 2.1$$

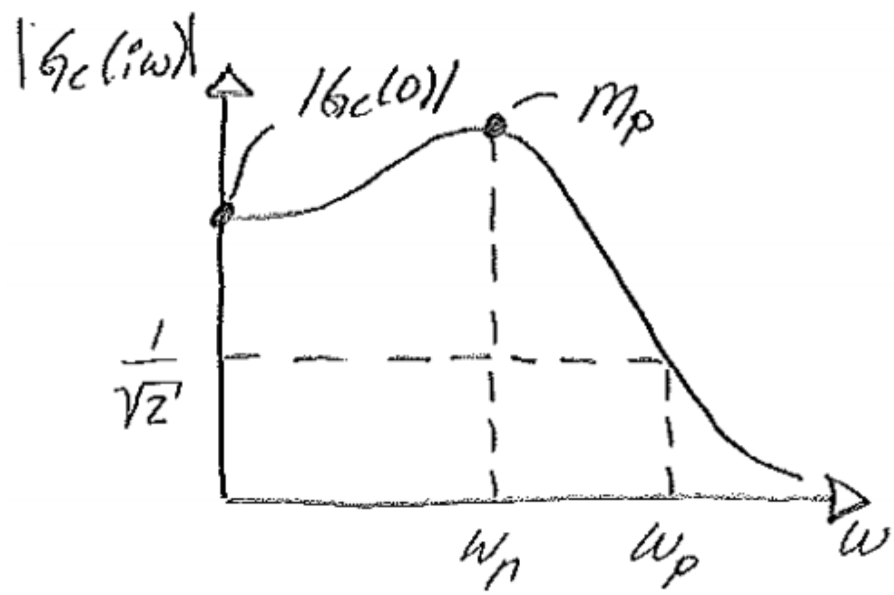
Vid detta K är $\omega_c = \omega_p$ så att systemet börjar självsvänga med frekvens $\omega_c = \omega_p =$

0.06, vilket motsvarar perioden

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{0.06} = 105\text{s}$$

Bodediagram för slutna system

I Figur 3 återgivs Bodediagrammet för ett slutet system



Figur 3: Bodediagram för ett slutet system (Källa: Mariette Annergren)

- M_p - Resonanstopp
  Den maximala förstärkningen som uppnås med $G_c(s)$
- ω_r - Resonansfrekvens
  Signaler med frekvens ω_r förstärks mest. I princip gäller

  $$M \sim M_p$$

  där M är stegsvarets översläng

- ω_B - Bandbredd
  Frekvens då $|G_c(s)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, säger något om vilka frekvenser som systemet förstärker och därmed hur snabbt systemet är. I princip gäller

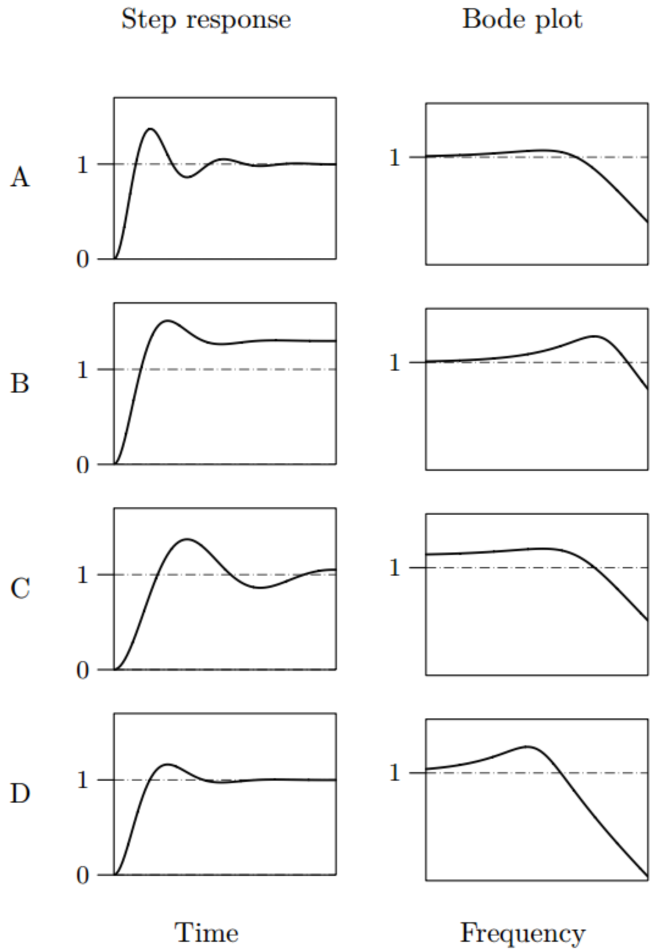
$$\omega_B \sim \frac{1}{T_r}$$

  där T_r är stegsvarets stigtid

- $|G_c(0)|$ - Statisk förstärkning
  Ifall $|G_c(0)| = 1$ kommer stegsvaret inte ha något stationärt fel

Uppgift 4.4

Para ihop rätt stegsvar med rätt Bodediagram i Figur 4



Figur 4: Fyra stegsvar med tillhörande Bodediagram i okänd ordning

- B har stationärt fel och endast 3) har $|G_c(0)| \neq 1$
  $\Rightarrow B \leftrightarrow 3$

- D har lägst översläng och 1) har lägst resonanstopp
  $\Rightarrow D \leftrightarrow 1$

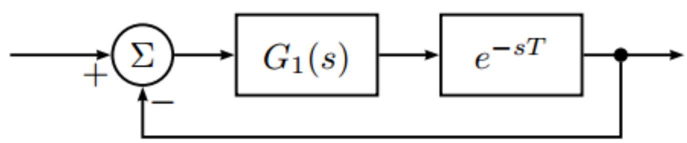
- C är långsammare än A (lägre T_r) och 4) har lägre bandbredd än 2)
  $\Rightarrow C \leftrightarrow 4, \quad A \leftrightarrow 2$

Sammanfattningsvis:

$$B \leftrightarrow 3$$
$$D \leftrightarrow 1$$
$$C \leftrightarrow 4$$
$$A \leftrightarrow 2$$

Uppgift 5.8

Ett blockdiagram för ett system med en tidsfördröjning är återgivet i Figur 5

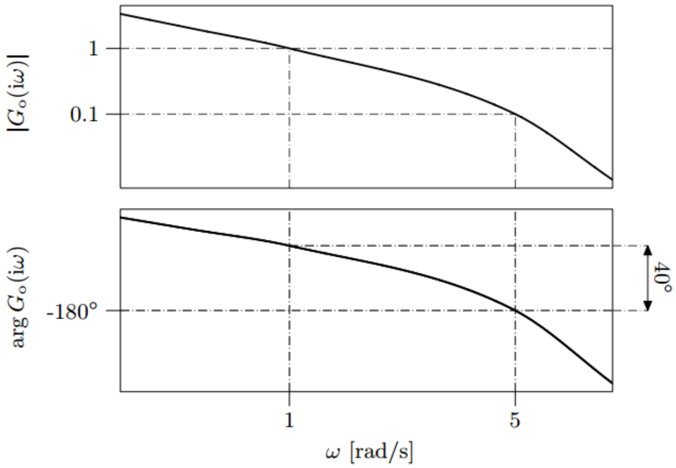


Figur 5: System med tidsfördröjning

$G_1(s)$ har inga poler i HHP.

a)

Om $G_1(s)$ har Bodediagrammet som återges i Figur 6



Figur 6: Bodediagram för $G_1(s)$

För vilka T blir det slutna systemet stabilt?

Hur påverkar tidsfördröjningen Bodediagrammet?

Amplitud:

$$|e^{-i\omega T}| = 1$$

$\Rightarrow$ amplituden påverkas inte!

Fas:

$$\arg e^{-i\omega T} = -\omega T$$

$\Rightarrow$ Fasen minskar med ωT!

Ur Bodediagrammet urläses

$$\begin{aligned}\omega_c &= 1\text{rad/s}\\ \varphi_m &= 40^\circ = 0.698\text{rad}\end{aligned}$$

Systemet är stabilt ifall fasmarginalen fortfarande är positiv efter tidsfördröjningens påverkan.

$$\begin{aligned}\varphi_m^* &= \varphi_m - \omega_c T\\ &= 0.698 - 1 \cdot T\end{aligned}$$

Alltså krävs

$$\begin{aligned} 0.698 - T &> 0 \\ \Rightarrow T &< 0.698 \end{aligned}$$