EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs
Övning 8

Martin Biel
mbiel@kth.se

19 september 2016

Repetition

- ω_c - Skärfrekvens
  frekvens när förstärkningen är 1 (Nyquist skär enhetscirkeln)
- ω_p - Fasskärfrekvens
  frekvens där fasen är $-180°$ (Nyquist skär negativa Re-axeln)
- A_m - Amplitudmarginal
  skillnad i amplitud mellan förstärkningen vid ω_p och 1
- φ_m - Fasmarginal
  skillnad i fas mellan fasen vid ω_c och -180^{circ}.

$\omega_c \sim \frac{1}{T_r} \Rightarrow \omega_c$ relaterar till systemets hastighet

- ω_c stor $\rightarrow$ snabbt system
- ω_c liten $\rightarrow$ långsamt system

φ relaterar till systemets stabilitet/dämpning

- $\varphi > 0 \rightarrow$ stabilt system
- φ stor $\rightarrow$ dämpat system
- φ liten $\rightarrow$ svängigt system

Lead-lag kompensering

Regulatorkonstruktion baserat på specifikationer i frekvensplanet:

- φ - stabilitet/dämpning
- ω_c - hastighet
- e_i - felstorlek

Lead-lag kompensering är en systematisk metod för att erhålla ett öppet system med önskade värden på ω_c,φ_m och e_i.

Lead-del

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_d s + 1}{\beta\tau_d s + 1}$$

K ändrar enbart amplitud. Ifall fasmarginalen är tillräcklig vid önskad ω_c räcker det med en P-regulator.

Ifall φ_m inte tillräcklig vid ω_c höjs fasen med en lead-länk

1. β avgör den maximala fashöjningen

   $$\phi = \arctan\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}} \text{ (Använd diagram på s.106)}$$

   Notera att små β leder till stor förstärkning av mätbrus.

2. τ_D bestämmer vid vilken frekvens den maximala fasförskjutningen ϕ inträffar

   $$\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}}$$

   $\Rightarrow \phi$ vid ω_c

3. K kan nu väljas så att den önskade ω_c uppnås

   $$|F_{lead}(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|}$$

Notera att $|F_{lead}(s)| : K \to \dfrac{K}{\beta}$

Ifall den nödvändiga fasadvanceringen är större än ungefär $40°$ används två lead-länkar eftersom β annars blir för liten. Notera att K förekommer i varje lead-länk och ger upphov till förstärkningen K^2.

Lag-del

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Lag-länken införs för att minska stationära fel (integrerande del). γ läggs till i nämnaren för att göra lag-länken stabil. En följd av detta är att det stationära felet aldrig fullt elimineras, eftersom det inte längre sker en ren integration. Det gäller dock att

$$F_{lag}(0) = \frac{1}{\gamma}$$

så att den statiska förstärkningen (och därmed det statiska felet) kan väljas godtyckligt genom att variera γ.

1. Välj γ så att önskad feldämpning uppnås. Använd slutvärdesstasen för lämplig insignal (steg, ramp, ...) för att undersöka det statiska felet. Kom ihåg att $F_{lead}(s)$ ger upphov till en förstärkning K i $s = 0$. ($|F_{lead}(0)| = K$).

2. τ_I avgör hur höga frekvenser som förstärks av lag-länken. Effekten av förstärkningen blir en fasretardation. Fasretarderingen vid ω_c ges av

$$\arg(F_{lag}(i\omega_c)) = -\arctan\frac{1}{\tau_I \omega_c}$$

   Sätt tillexempel τ_I till

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_c}$$

   vilket ger upphov till $5.7°$ i fasretarderingen. Detta kan kompenseras för genom att höja fasen $\approx 6°$ extra. Amplitudförändringen från lag-delen kan försummas, eftersom den inte märkbart kommer flytta ω_C.

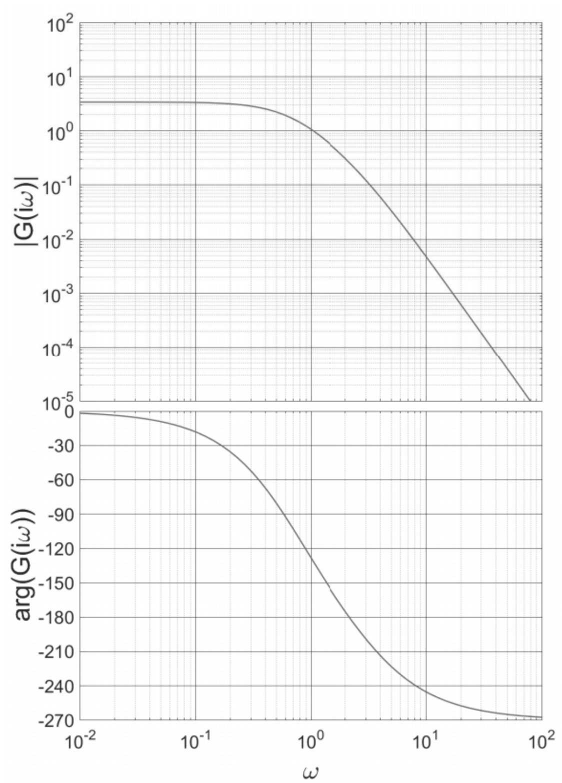
Den resulterande regulatorn ges av

$$F_{lead-lag}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Lead-lag kompensering är en approximativ metod, så dubbelkolla alltid att alla specifikationer uppfylls!

Uppgift 5.20

Bodediagrammet för ett system $G(s)$ är återgivet i Figur 1.



Figur 1: Bodediagram för $G(s)$

a)

$G(s)$ återkopplas med en regulator $F(s)$. Bestäm det slutna systemet.

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

b)

Låt $F(s) = K$. Beräkna ω_c och φ_m för $G_0(s) = KG(s)$ då $K = 1$. Är slutna systemet stabilt för $K = 1$.

Från bodediagrammet i Figur 1 erhålls

$$\begin{aligned} \omega_c &= 1[\text{rad/s}] \\ \varphi_m &= \arg G(i\omega_c) - (-180^\circ) = -130^\circ - (-180^\circ) = 50^\circ \end{aligned}$$

Eftersom $\varphi_m > 0$ är det slutna systemet stabilt då $K = 1$.

c)

Beräkna K så systemet blir dubbelt så snabbt.

Minns att $\omega_c \sim \dfrac{1}{T_r}$.

$\Rightarrow \omega_{c,d} = 2\omega_c = 2[\text{rad/s}]$.

$|KG(i2)| = 1 \Rightarrow K = \dfrac{1}{|G(i2)|} = \dfrac{1}{0.3} = 3.33$

d)

Hur försämrades systemet i c)?

Vid den nya skärfrekvensen är fasen $\approx -175^\circ$. Alltså är $\varphi_m = 5^\circ$ vilket ger ett mer svängigt system än i a).

e)

Använd en lead-länk så systemet approximativt bibehåller samma översläng men är dubbelt så snabbt.

Specifikation:

$$\omega_{c,d} = 2[\text{rad/s}]$$
$$\varphi_m = 50°$$

Eftersom fasen är 5° vid den önskade skärfrekvensen behöver vi höja fasen med 45°, så att $\phi = 45°$.
$\Rightarrow \beta = 0.18$ (från diagram).

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2\sqrt{0.18}} \approx 1.18$$

$$|F_{lead}(i\omega_{c,d})| \cdot |G(i\omega_{c,d})| = 1 \Rightarrow \frac{K}{\sqrt{0.18}} \cdot 0.3 = 1 \Rightarrow K \approx 1.4$$

$$\Rightarrow F_{lead}(s) = 1.4\frac{1.18s+1}{0.21s+1}$$

f)

Beräkna det statiska felet efter ett enhetssteg.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+KG(0)} = 0.17$$

(För att statiska felet ska gå mot noll krävs att antingen $F(s)$ eller $G(s)$ innehåller en ren integration.)

g)h)

Inför en lag-länk. Välj γ så att det statiska felet blir 0.01. Välj även ett lämpligt värde på τ_I.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+\frac{K}{\gamma}G(0)} = 0.01$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{K}{\gamma} G(0) = 100 \Rightarrow \gamma = 0.048$$

Vi betraktar olika alternativ på τ_I:

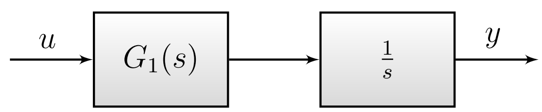
- $\tau_I = \dfrac{1}{\omega_c} \Rightarrow$ ($-45°$ fas, men eliminerar felet för högfrekventa signaler)
- $\tau_I = \dfrac{10}{\omega_c} \Rightarrow$ ($-5.7°$ fas, men eliminerar inte felet för högfrekventa signaler)

Vi utförde ingen kompensering för valet av τ_I i lead-länken, så vi väljer förslaget med minst inverkan på fasen:

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_c}$$

Uppgift 5.10

Betrakta systemet som är återgivet i Figur 2.

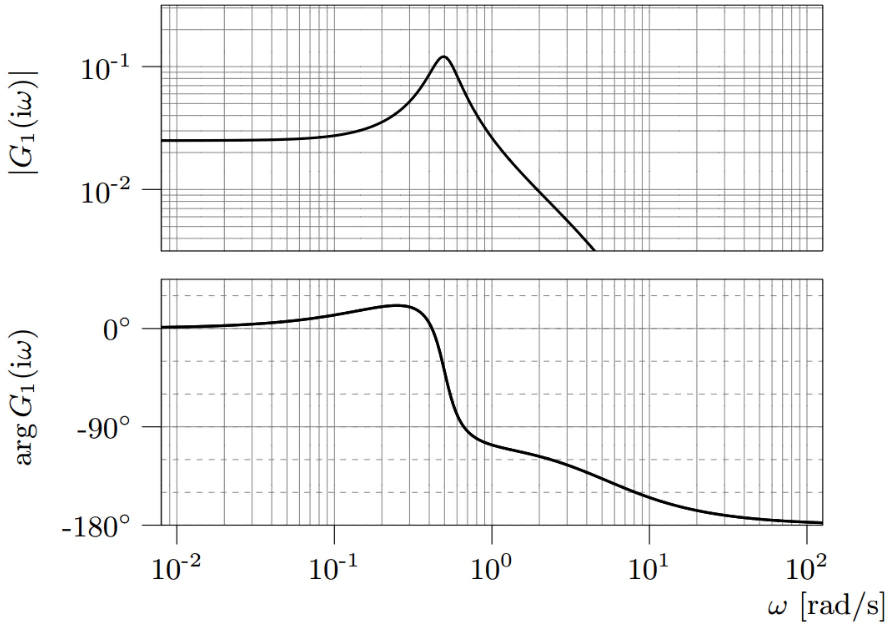


Figur 2: Blockschema för systemet $G(s)$

så att det fullständiga systemet ges av

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{s}$$

Bodediagrammet för $G_1(s)$ är återgivet i Figur 3



Figur 3: Bodediagram för $G_1(s)$

Bestäm en kompensator så att

- $\varphi_m = 40°$
- Systemet är dubbelt så snabbt som ett system med $\varphi_m = 40°$ där enbart P-reglering används.
- Det statiska felet vid en ramp är 1% av motsvarande fel för ett system med $\varphi_m = 40°$ där enbart P-reglering används.

Bestäm först amplitud- och fasförhållandena mellan $G(s)$ och $G_1(s)$:

$$|G(i\omega)| = \frac{|G_1(i\omega)|}{\omega}$$
$$\arg G(i\omega) = \arg G_1(i\omega) - 90°$$

$\varphi_m = 40°$ uppnås ifall

$$\arg G(i\omega_c) = -140° \Rightarrow \arg G_1(i\omega_c) = 50°$$

Läs av ur Figur 3 vilket ω_c detta motsvarar:
$\omega_{c,d}^P = 0.52$ rad/s.
Bestäm ett K_P så att den önskade fasmarginalen uppnås med enbart P-reglering:

$$K_P \cdot \frac{|G_1(i\omega_{c,d}^P)|}{\omega_{c,d}^P} = 1 \Rightarrow K_P \approx 4.2$$

Specifikationen är att systemet ska vara dubbelt så snabbt som det P-reglerade systemet.
$\Rightarrow \omega_{c,d} = 2\omega_{c,d}^P = 1.05$ rad/s.

Kolla vilken fasmarginal vi skulle ha ifall $\omega_{c,d}$ uppnås:

$$\arg G_1(i1.05) = -107^\circ \Rightarrow \arg G(i1.05) = -197^\circ$$

$\varphi_m = 40^\circ$ kräver alltså att fasen advanceras

$$17^\circ + 40^\circ + 6^\circ = 63^\circ$$

där 17° flyttar fasen till -180°, 40° ger den önskade fasmarginalen och 6° kompenserar för att vi kommer införa en lag-länk. Denna fasadvancering kräver två lead-länkar som höjder fasen 32° var.

$$\begin{aligned}
\beta &= 0.31 \text{ Från diagram} \\
\tau_D &= \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{1.05\sqrt{0.31}} \approx 1.72 \\
|F_{lead}(i\omega_{c,d})|^2 \cdot |G(i\omega_{c,d})| &= \frac{K^2}{\beta} \cdot \frac{|G_1(i\omega_{c,d})|}{\omega_{c,d}} \\
&= \frac{K^2}{0.31} \cdot \frac{0.024}{1.05} \\
&= 1 \\
\Rightarrow K &\approx 1
\end{aligned}$$

Introducera en lag-länk för att sänka det statiska felet vid en ramp. Notera att den rena integreringen i $G(s)$ eliminerar statiskt fel när insignalen är ett steg. Undersök det statiska felet vid ramp via slutvärdessatsen:

$$e_1 = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1 + F(s)\frac{G_1(s)}{s}} \cdot \frac{A}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + F(s)G_1(s)} = \frac{A}{|F(0)| \cdot |G_1(0)|}$$

Detta gäller allmänt för alla $F(s)$. Ansätt nu att felet med lead-lag regulatorn ska vara 1% av felet när P-regulatorn (med $K_P = 4.2$) används:

$$\frac{A}{|F_{lead-lag}(0)| \cdot |G_1(0|} = 0.01 \frac{A}{K_P \cdot |G_1(0)|}$$

$\Rightarrow |F_{lead-lag}(0)| = 100K_P = 420$

$|F_{lead-lag}(0)| = |F_{lead}(0)|^2 \cdot |F_{lag}(0)| = \dfrac{K^2}{\gamma} = 420$

$\Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{31} = 0.032$

Lead-länken har kompenserat för en fasretardering med storlek 6°. Välj därför

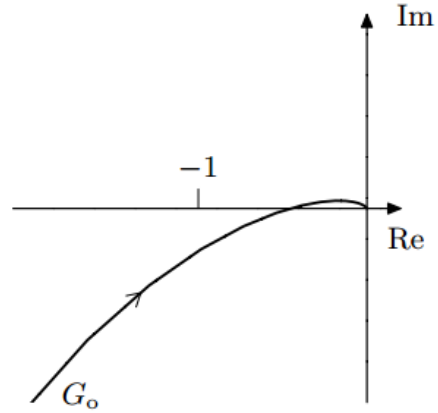
$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} \approx 10$$

Den resulterande regulatorn ges således av

$$F_{lead-lag}(s) = 13.6 \left(\frac{1.72s + 1}{0.53s + 1}\right)^2 \left(\frac{10s + 1}{10s + 0.032}\right)$$

Uppgift 6.3

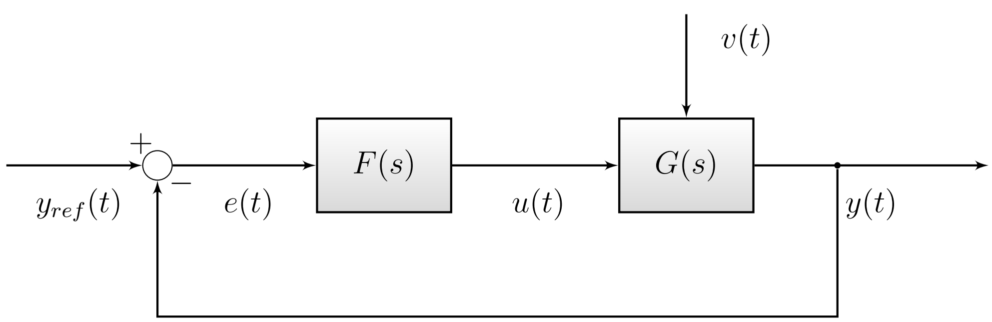
Figur 4 visar Nyquistkurvan för ett öppet system $G_0(s)$.



Figur 4: Nyquistkurva för ett givet $G_0(s)$

Visa i figur för vilka frekvenser additiva störsignaler förstärks repsektive dämpas.

Det fullständiga systemet kan återges i följande blockschema



En additiv störsignal innebär att utsignalens laplacetransform får följande uttryck:

$$Y(s) = G_c(s)Y_{ref}(s) + S(s)V(s)$$

Där $G_c(s)$ utgör det slutna systemet, $V(s)$ laplacetransformen av störsignalen, och $S(s)$ är känslighetsfunktionen som ges av

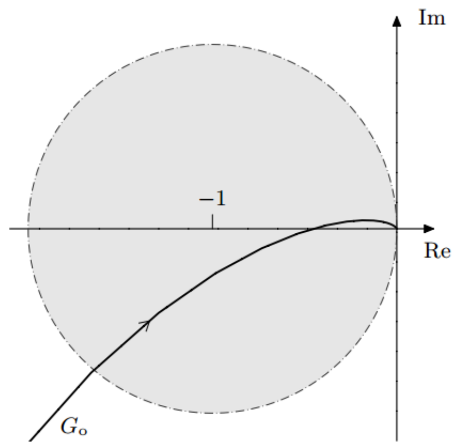
$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

Att störningen förstärks respektive dämpas innebär precis att $|S(s)| > 1$ respektive

$|S(s)| < 1$. Vi bestämmer för vilka frekvenser störsignalen förstärks:

$$|S(i\omega)| > 1 \Rightarrow |1 + G_0(i\omega)| < 1$$

Störsignalerna förstärks alltså vid de frekvenser när Nyquistkurvan ligger inom en enhetscirkel centrerad i -1. Situationen återgivs i Figur 5.



Figur 5: Nyquistkurva för G_0 med en utritad enhetscirkel som är centrerad i -1

Alltså, ifall störsignalen har frekvenser som motsvarar punkter på Nyquistkurvan inom den utritade enhetscirkeln förstärks dem under regleringen. Alla andra signalen dämpas.

Vi tog inte hänsyn till störningar när vi designade regulatorer i de föregående uppgifterna. Ibland måste man offra lite av prestandan som uppnås genom regulatordesign för att erhålla en snällare känslighetsfunktion.